La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-Règles graduées

-Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

Préliminaire :On rappelle que si (u_n) est une suite réelle, $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
En déduire que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite a, strictement positive, alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geq \frac{a}{2}$.
Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x.(1-x)$ et la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1 Etudier les variations de f.

2a Montrer que,pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$

2b Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est croissante.
En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.

2c Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in N}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3 On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4 Montrer à l'aide de la question 2b que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

EXERCICE 2

Partie I: E désigne un espace vectoriel sur R, de dimension n $(n \geq 2)$
On note i l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.
Soit s un endomorphisme involutif de E, c'est à dire vérifiant $s \circ s = i$.

1 Justifier que s est bijectif et définir s^{-1} .
2 Déterminer les seules valeurs propres possibles de s .
On suppose dans la suite de cette partie que de plus $s \neq i$ et $s \neq -i$.
3a Montrer que $(s - i) \circ (s + i) = \theta$.
3b En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s .
4 Montrer que $E = \text{Ker}(s - i) \oplus \text{Ker}(s + i)$ (On montrera dans un premier temps que si pour tout x de E on a : $x = u+v$, avec u élément de Ker (s - i) et v élément de Ker (s + i), alors nécessairement $s(x) = u - v$)
s est appelée la symétrie par rapport à Ker (s - i) parallèlement à Ker (s + i).

Partie II : Etude d'un exemple.

$M_n(R)$ désignant l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n , on note S l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(R)$ et A l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(R)$.
Si M est la matrice de $M_n(R)$ dont $m_{i,j}$ est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne , avec i et j éléments de { 1,2,...,n } ,on rappelle que :
M est symétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = m_{i,j}$.
M est antisymétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = -m_{i,j}$.
Dans la suite , ${}^t M$ désigne la matrice transposée de M .
1 Vérifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(R)$.
2 Montrer que : $M_n(R) = S \oplus A$.
3 On note T l'endomorphisme de $M_n(R)$ qui à chaque matrice associe sa transposée , montrer que T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A .

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice , n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif .

Partie I

1 j et k désignant des entiers naturels , $a_{k,j}$ des réels tels que , pour tout j la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ soit convergente , montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$.

2 Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans { 0,1,...,n } . Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que X=k par :

$$E(S / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j\, P(S=j / X=k)$$

Montrer , en utilisant la première question , que : $E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S / X=k).P(X=k)$.

Partie II

Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble .A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
On émet les hypothèses suivantes :
-Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée .
-Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers .
(Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur)
Enfin , pour tout entier naturel k , on appelle S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ .

1 Montrer que pour tout j appartenant à { 1,2,...,n } et pour tout entier naturel k :

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n} P(S_k = j-1).$$

2 En déduire que $E(S_{k+1}) = 1 + (1 - \frac{1}{n})\ E(S_k)$.

3 Après avoir justifié que $E(S_0) = 0$, déterminer $E(S_k)$ pour tout entier naturel k .

4 Montrer que si S désigne la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné : $E(S) = n(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})$

PROBLEME

p et n désignent deux entiers naturels non nuls .

Partie I

On pose : $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1a Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1 : $0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

1b En déduire que la suite $(v_n)_{n \in N^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ est élément de [0,1] . On note maintenant : $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

2a Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{p+x} dx$.

2b En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \le u_p \le \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$.

2c A l'aide de cette dernière inégalité , établir que : $\frac{1}{2(n+1)} \le r_n \le \frac{1}{2n}$

3 Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

Partie II

Dans cette partie , k est un entier supérieur ou égal à 1 .

On pose , pour tout réel t strictement positif : $f_0(t)=\frac{1}{t}$ et $f_k(t)=\frac{1}{t(t+1)\ldots(t+k)}$

1 Montrer que $f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=k.f_k(t)$.

2 En déduire que : $\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p)=\frac{n!}{k.(n+k)!}$

Partie III

On note P_k le polynôme défini par :

$P_1(t)=t$ et , pour tout k supérieur ou égal à 2 , $P_k(t)=t(1-t)(2-t)\ldots(k-1-t)$.

On pose d'autre part : $a_k=\int_0^1 P_k(t)dt$.

1a Vérifier que, pour tout x positif : $\frac{1}{p+x}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\times\frac{1-x}{p+x}$

1b En déduire que $u_p=\frac{1}{2p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{P_2(x)}{p+x}dx$.

2a Montrer que pour tout k entier supérieur ou égal à 1 , et pour tout réel x positif :

$$\frac{P_k(x)}{p+x}=\frac{P_k(x)}{p+k}+\frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}$$

2b En déduire , par récurrence sur k , que:

$$u_p=\frac{a_1}{p(p+1)}+\frac{a_2}{p(p+1)(p+2)}+\cdots+\frac{a_k}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}+\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)}\int_0^1\frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx$$

2c Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0\le\int_0^1\frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx\le\frac{a_{k+1}}{p-1}$

2d En déduire , en utilisant la partie II , que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$r_n=\frac{a_1}{n+1}+\frac{a_2}{2(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}+r_{n,k}$$

avec $0\le r_{n,k}\le\frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

2e Construire une suite $(v_{n,k})_{n\in N}$, de limite γ telle que : $0\le\gamma-v_{n,k}\le\frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

3a Calculer a_1,a_2,a_3,a_4 .

3b Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

3c Ecrire , en Turbo-Pascal , un algorithme permettant le calcul de v_{n_0} , puis de $v_{n_0,3}$.

3d Donner la valeur de γ à 10^{-5} près .